فصل ۱- تنش

تنش: شدت نیروهای عکس العمل داخلی جسم جامد بر واحد سطح $Pa = N/m^2$ $psi = lb/in^2$

تنش عمودی: تنش عمود بر سطح، نرمال یا عمودی σ کششی + فشاری −

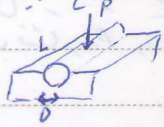
تنش برشی: تنش مماس بر سطح، برشی τ

نیرو از مرکز سطح مقطع عبور کند $\sigma = \frac{P}{A}$

$\tau = \frac{P}{A}$

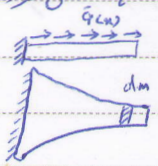
تنش تماسی یا لهیدگی: تنشی که در محل تماس دو سطح به وجود می آید σ_b

ابتدا سطح تماس دو جسم را بر روی صفحه عمود بر امتداد نیرو تصویر کرده سپس نیرو را بر مساحت سطح تصویر شده تقسیم می کنیم



$\sigma_b = \frac{P}{LD}$

تنش حاصل از نیروی گسترده: نیروی عمودی R برابر $\sum_{j=1}^{n} P_j + \sum_{i=1}^{m} \int q_i(x)\,dx$ که P_j نیروی منفرد و $q_i(x)$ نیروی گسترده وارده به قسمتی از میله واقع در یک طرف مقطع



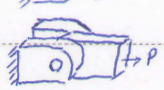
تنش عمودی براثر حرکت دورانی $R = \int_{x_c}^{x_D} \rho \omega^2 x A(x)\,dx$

= $x\omega^2$ فاصله مرکز جرم قطعه عمود بر x جرم عمود بین A_0 و انتها

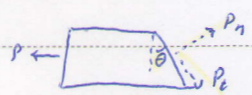
تنش برشی در پین های اتصال

۱- اتصال پین با تنش منفرد: نیروی برشی توسط یک سطح مقطع پین تحمل می شود $\tau = \frac{P}{A}$

۲- اتصال پین با تنش دوبل: نیروی برشی توسط دو سطح مقطع پین تحمل می شود $\tau = \frac{P/2}{A}$

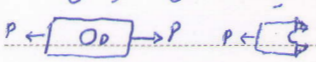


تنش در صفحات مورب $A_{ab} = \frac{A_0}{\cos\theta}$ $P_n = P\cos\theta$ $P_t = P\sin\theta$ $\sigma_n = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$ $\tau = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$



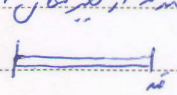
تمرکز تنش: در نزدیک نقاط ناپیوستگی مانند وجود سوراخ یا تغییر ناگهانی در سطح مقطع (نقاط بحرانی) تنش افزایش قابل ملاحظه ای خواهد داشت

ضریب تمرکز تنش: نسبت تنش ماکزیمم به تنش میانگین (تنش یکنواخت در باریکترین مقطع) ضریب تمرکز تنش نامیده می شود



$\sigma_{ave} = \frac{P}{(w-d)t}$ $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$

تنش حرارتی: اگر در سازه ای قیودی وجود داشته باشد که از تغییر مکان آن آزادانه اعضاء سازه براثر حرارت جلوگیری نمایند آن گاه در اعضاء سازه تنش بوجود خواهد آمد $\delta_t = \alpha L \Delta T$



تنش پسماند: بوار هنگام ساخت تحت اثر نرآینده‌ای نظیر نورد، اکستروژن، فورجینگ و چکش کاری قرار می‌گیرند و پس از ریخته‌گری به طور یکنواخت خنک نمی‌شوند

ضریب اطمینان: نسبت بارهای P_u به بار مجاز P_{all}

$$F.S = \frac{P_u}{P_{all}}$$

اگر رابطه بین نیرو و تنش خطی باشد

$$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$

حاشیه اطمینان: نسبت بارهای P_u به بار طراحی P_d منهای یک

$$M.S = \frac{P_u}{P_d} - 1$$

* اگر سطحی خمیده (یا سطح) تحت فشار ثابت P_0 واقع شود و نیروی وارد به سطح در امتداد دلخواه باشد حاصلضرب فشار P_0 و مساحت تصویر سطح بر صفحه عمود بر آن امتداد

$$F = (2rL)\,P_0$$

ترک در امتداد عمود بر تنش ماکزیمم پدید می‌آید

فصل ۲. کرنش و تغییر مکان محوری

کرنش $\delta = \int_a^b \varepsilon_x \, dx$ تغییر مکان $\delta(x)$ تابعی از کرنش $\varepsilon_0 = \frac{d\delta(x)}{dx}$

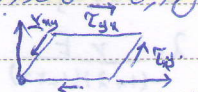
$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$

کرنش واقعی مجموع کرنش‌ها در هر لحظه

$\varepsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dl}{l} = \ln \frac{L}{L_0}$

رابطه بین کرنش (کرنش مهندسی) و کرنش واقعی $\varepsilon_t = \ln(1+\varepsilon)$

کرنش برشی در صفحه x-y، زاویه γ_{xy} کرنش برشی در صفحه است. کاهش زاویه ایجاد از حالت قائمه و جهت را بیان سنجیده می‌شود.



$G = \frac{\tau}{\gamma}$

کرنش حرارتی α ضریب انبساط حرارتی

$\varepsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L \Delta T}{L} \rightarrow \varepsilon_T = \alpha \Delta T \qquad \sigma = E\alpha\Delta T$

کرنش در حالت سه بعدی: تغییر مکان جسمی در جهت x، y، z به ترتیب بصورت $u(x,y,z)$، $v(x,y,z)$، $w(x,y,z)$

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

قانون هوک تنش متناسب است با کرنش و ضریب تناسب E مدول الاستیسیته یا مدول یانگ $\sigma = E\varepsilon$

رابطه بین کرنش برشی γ و تنش برشی τ ← $\tau = G\gamma$ که G مدول برشی یا مدول صلبیت که برابر شیب نمودار τ-γ است

تغییر مکان محوری $\delta = \frac{P}{A}\frac{L}{E} = \frac{\sigma L}{E}$ تغییر مکان که $P = K\delta \leftarrow K = \frac{AE}{L}$

$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x).E} dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx$ میله غیر یکنواخت

* برای تعیین تغییر مکان انتهای میله یکنواخت با سختی EA که تحت بار گسترده است ساحت سطح محور نمودار بار را در ناحیه مرکز سطح نمودار نامگذاری و ضرب کرده و بر EA تقسیم می‌کنیم

$\delta = \frac{\bar{x} S}{EA}$

مبدا و انتهای میله $\delta_c = \int_0^L \frac{(L-x)q(x)}{EA} dx$

$\delta = \int_0^L \frac{x q(x)}{EA} dx$

* به طور کلی در صورتی که تیر تحت نیروی محوری متغیر و گسترده باشد نیرو را به صورت قائم بر تیر وارد کرده و گشتاور حاصل از آن را بر EA تقسیم می‌نماییم

تانسور تنش تنش‌های عمودی σ_x، σ_y و σ_z اند و تنش برشی τ_{ij} اندیس i معرف صفحه و اندیس j جهت تنش در آن صفحه و $\tau_{zx} = \tau_{xz}$، $\tau_{yz} = \tau_{zy}$، $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

روابطی که برای مکعب تانسور برقرار است $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \qquad I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$

تغییر ناپذیر و پایا‌های اول، دوم و سوم تانسور تنش $I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$

ضریب پواسون: برای موادی که خواص مکانیکی آن‌ها در همه نقاط یکسان است (همگن) و در همه جهات یکسان (ایزوتروپیک)

$\nu = \left|\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}}\right|$ قدر مطلق نسبت کرنش جانبی به کرنش طولی (جهت اعمال بار)

$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ $\quad \nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$ $\quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

قانون عمومی هوک

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ $\quad \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$ $\quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$ $\quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda e$ $\quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$ $\quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ $\quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda e$ $\quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

G, λ ثوابت لامه $\quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ در صورت وجود کرنش حرارتی به طرف چپ αT و به طرف راست $-\frac{\alpha E T}{1-2\nu}$ اضافه می‌گردد

تنش صفحه ای: در صورتی که تنش در جهتی صفر باشد $\sigma_z = 0$

$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]$ $\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]$ $\quad \tau_{yz} = 0$

$\sigma_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ $\quad \tau_{xz} = 0$

کرنش صفحه ای: کرنش در جهتی صفر مثل سد، لوله‌های طویل استوانه‌ای، مایعات و تونل‌ها

$\varepsilon_z = 0$

$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$ $\quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$ $\quad \tau_{yz} = 0$

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ $\quad \tau_{zx} = 0$

کرنش حجمی: نسبت تغییر حجم المان به حجم اولیه. اگر ابعاد a, b, c باشد

$\varepsilon_V = \frac{\text{تغییر حجم}}{\text{حجم اولیه}} = \frac{abc(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - abc}{abc} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

کرنش سطحی: نسبت تغییر سطح به سطح اولیه

$\varepsilon_A = \frac{\text{تغییر سطح}}{\text{سطح اولیه}} = \frac{bc(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - bc}{bc} = (1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 = \varepsilon_z + \varepsilon_y$

(در صفحه xy): $\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1-\nu)(\sigma_x + \sigma_y) - 2\nu\sigma_z]$

(در صفحه yz): $\varepsilon_A = \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}[(1-\nu)(\sigma_y + \sigma_z) - 2\nu\sigma_x]$

(در صفحه zx): $\varepsilon_A = \varepsilon_z + \varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1-\nu)(\sigma_z + \sigma_x) - 2\nu\sigma_y]$

مدول حجمی: اگر المانی تحت فشار هیدرواستاتیک P

$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(-3P) \rightarrow \varepsilon_V = -\frac{P}{K}$

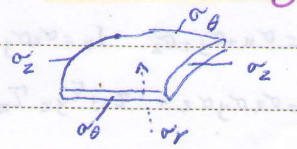
که $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ مدول حجمی یا مدول فشار و یا مدول بالک

تنش در استوانه جدار نازک: استوانه جدار نازک به شعاع r و ضخامت t که دو انتهای آن بسته شده و تحت فشار P

$\sigma_z = \frac{Pr}{2t}$ $\quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_z)$ $\quad \Delta r = \varepsilon_\theta r$

$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$ $\quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\theta)$ $\quad \Delta L = \varepsilon_z L$

$\sigma_r = 0$ $\quad \varepsilon_r = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\theta + \sigma_z)$ $\quad \Delta t = \varepsilon_r L$



تنش در کره جدار نازک

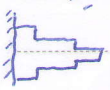
$\sigma_\theta = \sigma_t = \frac{Pr}{2t}$ $\Delta r = \varepsilon_\theta r$ $\Delta t = \varepsilon_r t$

$\varepsilon_\theta = \frac{(1-\nu)\sigma_\theta}{E} = \frac{(1-\nu)Pr}{2tE}$ $\varepsilon_r = -\frac{\nu}{E}(2\sigma_\theta) = -\frac{\nu P r}{tE}$ $\varepsilon_A = \varepsilon_\theta + \varepsilon_t$

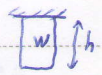
مرکز سختی: میله‌ای به n میله به سختی $k_1, k_2, \dots, k_n$ اگر نیروی که به آن وارد شود قطعه به صورت افقی تغییر مکان پیدا

$x_s = \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}$

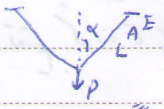
* تغییر مکان انتهای میله با سطوح و جنس متفاوت: ناظری پشت به تکیه‌گاه روی بخش‌های مختلف میله مجموع نیروهایی که ناظر مشاهده می‌کند را در $\frac{L}{AE}$ ضرب می‌کنیم مجموع حاصلضرب‌ها برابر کرنش



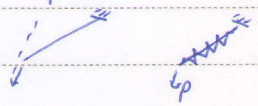
* تغییر مکان انتهای آزاد ستون برابر نیروی نصف وزن ستون به انتهای آن $\frac{Wh}{2EA}$



* میله‌ای شکل به صورت فنری است که سختی $\frac{EA}{L}2\cos^2\alpha$



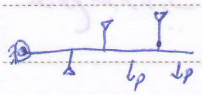
* میله کج ضریب فنریت در راستای P



$K = \frac{EA}{L}\cos^2\alpha$

* اگر به قطعه صلب n میله رکابل وصل باشد و تحت نیروی گشتاور خارجی باشد. نیرو در میله زام $F_j = \frac{a_j k_j}{\sum a_i^2 k_i} M$

a_i فاصله i ام از مفصل k_i سختی میله i ام $\frac{A_i E_i}{L_i}$ M مجموع گشتاور و نیروهای خارجی حول مفصل



تغییر مکان نقطه دلخواهی از قطعه صلب که به فاصله d از مفصل است $\delta = \frac{Md}{\sum a_i^2 k_i}$

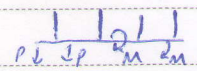
* قطعه صلبی که به n میله متصل و تحت P نیرو و M کوپل باشد نیرو در میله زام

$F_j = \frac{P k_j}{\sum k_i} \mp \frac{k_j a_j}{\sum k_i a_i^2} M$

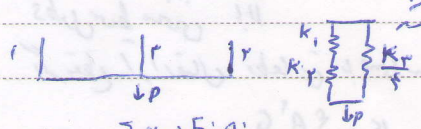
$\theta = \frac{M}{\sum k a^2}$

$\delta = \frac{P}{\sum k} \mp \frac{Md}{\sum k a^2}$

+ ↓P +↻M سمت راست مرکز سختی



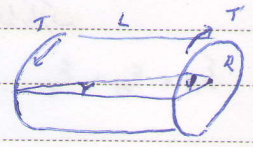
* اگر میله صلب به ۳ میله وصل باشد و گشتاور و کوپل حول مرکز صفر باشد



* مرکز سختی بلوکی از n جنس و شکل مختلف است (x_i مرکز جرم i)

$x_c = \frac{\sum x_i E_i A_i}{\sum E_i A_i}$

فصل ۳- پیچش



$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش برشی

$\gamma L = R\phi$

T گشتاور پیچشی J ممان قطبی

$J = \frac{1}{2}\pi R^4 = \frac{1}{32}\pi D^4$ دایره

$J = \frac{1}{2}\pi (R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{32}\pi (D_1^4 - D_2^4)$

$\gamma = \frac{\tau}{G}$ G مدول برشی

$\phi = \int \frac{T(x)\,dx}{G\,J(x)}$ T و D متغیر

$\phi = \frac{TL}{GJ}$

$\phi = \int \frac{x\,t(x)\,dx}{GJ}$ T متغیر

$\phi = \frac{\bar{X} S}{GJ}$

$r\varphi = L\gamma$

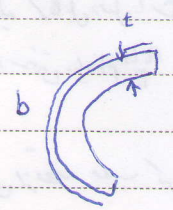
اگر میله تحت گشتاور صفر و گرده باشد میله را به صورتی که گشتاورها بار قائم باشد در نظر گرفته و ممان آن را بر GJ تقسیم کرده تا زاویه دوران بدست آید

$\phi = \frac{\Sigma M}{GJ}$

$T = K\phi$ سختی پیچشی $K = \frac{GJ}{L}$

پیچش در مقطع جدار نازک

مقاطع جدار نازک باز



$\tau = \frac{Tt}{J}$

$\phi = \frac{TL}{GJ}$

$J = \frac{1}{3}t^3 b$

$\tau_k = \frac{Tt_k}{J} = \frac{Tt_k}{\frac{1}{3}\Sigma b_i t_i^3}$ $\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{G \times \frac{1}{3}\Sigma b_i t_i^3}$

اگر مقطع از n مقطع به ضخامت های t_i تشکیل شده باشد

$T = K\phi \rightarrow K = \frac{G \times \frac{1}{3} b t^3}{L}$ سختی پیچشی

مقاطع جدار نازک بسته

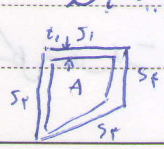
$\tau = \frac{T}{2At}$ A مساحت محصور بین منحنی بسته ای که از وسط ضخامت می گذرد

$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{G\,4A^2}\int\frac{ds}{t}$ $J = \frac{4A^2}{\int\frac{ds}{t}}$

طول محیط منحنی بالا

اگر مقطع از اتصال قطعاتی با ضخامت $t_1, t_2, \ldots$ با طول $s_1, s_2, \ldots$ باشد

$\phi = \frac{TL}{G \times 4A^2}\Sigma\frac{s_i}{t_i}$



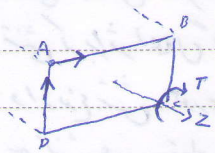
$T = K\phi \rightarrow K = \frac{4A^2 G}{L\int\frac{ds}{t}}$

J دایره‌ی $= 2\pi r^3 t$

گشتاور در شفت‌های انتقال قدرت برای انتقال قدرت اتوان P (N.m/s) اگر سرعت زاویه‌ای شفت ω (rad/s)
و گشتاور وارد بر آن T باشد (N.m) f دور بر ثانیه یا هرتز

$$P = T.\omega \rightarrow T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$$

پیچش مقاطع مستطیل



صفحات افقی و قائم عمود بر محور x که از نقطه A عبور می‌کنند سطوح آزاد میله می‌باشند
هیچ تنشی بر آن‌ها وارد نمی‌شود: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$
تنش برشی عمود بر محور z صفر می‌باشد. تنش برشی ماکزیمم در وسط اضلاع AB و CD (اضلاع بزرگتر مستطیل) رخ می‌دهد

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha a b^2} \qquad \alpha \sim \frac{a}{b} \qquad \alpha = \text{مربع } 0.208$$

$$\phi = \frac{TL}{\beta G a b^3} \qquad \beta \sim \frac{a}{b} \qquad \beta = \text{مربع } 0.140$$

پیچش پلاستیک

قسمتی از مقطع ρ_y در مرحله الاستیک و بقیه نقاط $\rho > \rho_y$ در مرحله پلاستیک است

$$T = \frac{4}{3} \tau_y \left(1 - \frac{\rho_y^3}{4R^3}\right)$$

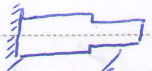
1/2

هنگامیکه گشتاور پیچشی افزایش یافته و به T_p گشتاور پلاستیک می‌رسد تنش برشی در کلیه نقاط مقطع برابر تنش تسلیم τ_y می‌شود

$$T_p = \frac{4}{3} \tau_y$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

* زمانی که دو چرخدنده به یکدیگر متصل باشند
* میله‌ای از دو جنس متفاوت 1 و 2 تشکیل شده ← دو فنر موازی فرض شده
* میله با میله در سطح مقطع ← فنر سری فرض شده



* تیری دو سر گیردار با گشتاور پیچشی و منفرد را می‌توان تیری با نیروهای عمودی در نظر گرفت و از استاتیک نیروی تکیه‌گاه بدست می‌آید
* مقطعی که تحت گشتاور پیچشی T قرار گرفته است گشتاور پیچشی قسمت BC از مقطع برابر

$$T_{BC} = \frac{A_s}{A} T$$

$hP \times 6600 = \text{lb in/s}$

صلبیت پیچشی (سختی پیچشی) مقطع برابر $k = \frac{T}{\phi}$

مقاومت پیچشی برابر $k' = \frac{T}{\tau_{max}}$

* دو دیسک صلب با گشتاور پیچشی T توسط n عدد پیچ ردیف شده، تنش برشی در هیچ ردیف نام

$$\tau_i = \frac{G_i r_i T}{\sum n_i G_i A_i r_i^2}$$

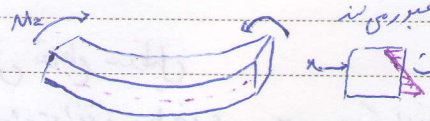
G_i مدول برشی پیچ ردیف i ام، r_i فاصله پیچ ردیف i ام از مرکز دیسک، A_i مساحت مقطع پیچ ردیف i ام و n_i تعداد پیچ ردیف i ام

* مجموع جریان برشی در شاخه‌ها برابر صفر است

$\sum q_i = 0$

فصل ۴ - تنش خمشی در تیرها

بر اثر اعمال گشتاور خمشی M در قسمت بالای مقطع تیر تنش فشاری و در قسمت پایین آن تنش کششی به وجود می‌آید نقاطی که تنش صفر است محور خنثی نامیده می‌شود که از مرکز سطح عبور می‌کند



تنشی که بر اثر اعمال گشتاور خمشی در مقطع تیر به وجود می‌آید تنش خمشی است و از نوع تنش محوری می‌باشد

$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$ تنش عمود بر مقطع در راستای محور x به فاصله y از محور خنثی، M_z گشتاور خمشی و I_z ممان اینرسی مقطع حول z

فرمول فوق زمانی درست است که مقطع تیر دارای محور تقارن باشد و گشتاور خمشی حول محور اصلی مقطع انجام شود

c بیشترین فاصله تا محور خنثی دارد و $S = \frac{I}{c}$ مدول مقطع با اساس مقطع است که برابر مقاومت خمشی مقطع است

مقطع نامتقارن

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}}$$

در صورتی که رابطه تنش کرنش به صورت $\sigma = K\varepsilon^n$ باشد $c = \frac{h}{2}$ $I_z = \frac{1}{12}bh^3$

$$\sigma_x = \frac{n+2}{3c^{n-1}} \frac{M_z y^n}{I_z}$$

$$\sigma_{max} = \frac{n+2}{3} \frac{M_z c}{I}$$

* در صورتی که M حول یکی از محورهای اصلی باشد نیروی که به قسمتی از مقطع به مساحت A وارد می‌شود برابر $F = \frac{MQ}{I}$ است

I ممان اینرسی کل مقطع و Q ممان مقطع A در فاصله مرکز سطح A تا محور خنثی

و قسمتی از گشتاور که توسط جنس A تحمل می‌شود $M_A = M\frac{I_A}{I}$ است I_A ممان اینرسی قطعه A حول محور خنثی

* در مقطع n جنسی گشتاور M_j که توسط جنس j تحمل می‌شود برابر $M_j = \frac{E_j I_j}{\sum E_j I_j} M$

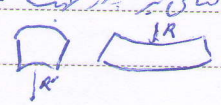
کرنش محوری نقطه‌ای به فاصله y از محور خنثی $\varepsilon_x = \frac{y}{R}$ $\varepsilon_{max} = \frac{c}{R}$ $\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{max}}{c} y$ (R شعاع انحنا)

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{y}{R}$$

رابطه بین گشتاور خمشی و شعاع انحنا $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$ $\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{M}{EI}$ R_0 شعاع اولیه

در صورتی که $\sigma = K\varepsilon^n$ باشد و B مقدار ثابتی برحسب n، K و ابعاد مقطع $\frac{1}{R^n} = \frac{M}{B}$

انحنای آنتی کلاستیک: انحنای تیر در جهت z که در طرف مخالف مرکز انحنا و در صورتی که ابعاد طولی جسم زیاد نباشد در نظر می‌گیریم



$R' = \frac{R}{\nu}$ R' شعاع آنتی کلاستیک

مقطع دوجنسی: به مقطع معادلی از جنس واحد تبدیل کرد اگر $\frac{E_1}{E_2} = n$ ابعاد جنس 1 را n برابر کرده و تنش نقاط تبدیل شده ($\sigma = \frac{My}{I}$) را در n ضرب می‌کنیم تا تنش جنس 1 به دست آید (I ممان اینرسی مقطع تبدیل شده)

اگر مقطع دارای محور تقارن باشد $I_e = I_2 + nI_1$ می‌شود و $\sigma_2 = \frac{My}{I_e}$ $\sigma_1 = \frac{nMy}{I_e}$

* به طور کلی $I_e = \sum n_i I_i$ ممان اینرسی هر یک از جنس i (I_i) حول محور تقارن و $\sigma_j = n_j \frac{My}{I^e}$ $n_i = \frac{E_i}{E_k}$

* در مقطع مرکب ابتدا محل محور خنثی مقطع را بدون تبدیل آن به مقطع معادل سنت به دست آورده سپس

$$\eta_N = \frac{\sum E_i A_i n_i}{\sum E_i A_i}$$

$$\sigma_j = E_j \frac{My}{\sum E_i (I_i)_{NA}}$$

A_i مساحت جنس E_i مدول الاستیسیته جنس n_i فاصله از مرکز سطح جنس

σ_j تنش در جنس ام، y = فاصله نقطه دلخواه در جنس ام از محور خنثی

$(I_i)_{NA}$ ممان اینرسی جنس i ام حول محور خنثی E_i مدول الاستیسیته جنس i ام

خمش توأم با نیروی محوری (خمش نامتقارن) گشتاور خمشی حول محورهای اصلی و نیروی محوری در مرکز سطح وجود دارد

$$\sigma_A = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{P}{A}$$

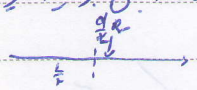
محور خنثی این مقطع: تنش در ربع اول را به دست آورده و برابر صفر قرار داده تا y, z محور خنثی به دست آید

گشتاور خمشی پلاستیک M_y گشتاور خمشی که باعث شود اولین نقطه مقطع وارد ناحیه پلاستیک گردد گشتاور خمشی پلاستیک و گشتاور خمشی پلاستیک باعث می شود کلیه نقاط مقطع وارد ناحیه پلاستیک شوند و M_P نمایش می دهند

ضریب شکل $\frac{M_P}{M_y}$

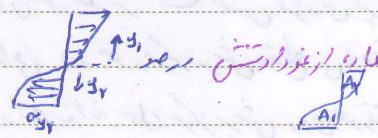
* گشتاور خمشی ماکزیمم زمانی رخ می دهد که وسط فاصله بین برآیند نیروها تا نزدیکترین نیرو به آن روی محور تقارن

$$M_{max} = R_{برآیند} \left(\frac{L}{2} - \frac{d}{2}\right)$$



محاسبه گشتاور خمشی با استفاده از توزیع تنش در صورت

$$M = \int y_1 (\sigma_{y_1})\, dA_1 + \int y_2 (\sigma_{y_2})\, dA_2$$



$M = b(A_1 y_1 + A_2 y_2)$ مقطع مستطیل شکل $P = b(A_2 - A_1)$ مقطع b

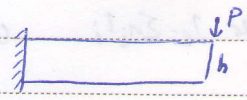
$I = \frac{1}{12} h^3 b$

$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$

$I = \frac{1}{36} h^3 b$

$I = \frac{1}{4} \pi R^4$

فصل ۵ - تنش برشی در تیر



$\tau_{av} = \frac{P}{th}$

$\tau = \frac{VQ}{It}$ $\quad Q = \int y\,dA = \bar{y}A$ گشتاور اول سطح جدا شده

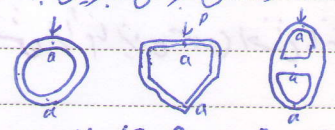
شدت نیروی برشی $q = \tau t = \frac{VQ}{I}$ جریان برشی

I ممان اینرسی کل مقطع نسبت به محور خنثی $\quad t$ طول برش در مقطع

$F = \int_0^b q(x)\,dx$ نیروی برشی در شاخه‌ای به طول b

اگر قطعه تحت برش جدا شده آن را $2t$ برابر کرده و از جهت دیگر هم می‌بریم

* اگر مقطعی دارای محور تقارن باشد و نیروی برشی در راستای این محور به مقطع وارد شود تنش برشی و جریان برشی در نقاطی که توسط محور برش زده صفر است (نقاط a $\tau = 0$)



اگر مقطعی دارای محور تقارن نباشد

$$\tau = \frac{V_y(I_y Q_z - I_{zy} Q_y)}{t_0(I_z I_y - I_{zy}^2)}$$

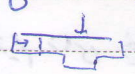
تنش برشی در مقطع دوجنسی مقطع را به مقطع معادل تبدیل کرده I ممان اینرسی مقطع معادل و t طول برش در مقطع اولیه

* تیر مرکبی از n جنس ساخته A_i جنس بالای برش

$$\tau = \frac{V\sum_{i=k}^{n} A_i E_i y_i}{t\sum E_i I_i}$$

$$y_N = \frac{\sum E_j A_j y_j}{\sum A_j E_j}$$ محل محور خنثی مقطع مرکب

* رسم جریان برش ابتدا برش در نقطه دلخواهی زده که مقطع به ۲ قسمت جدا شود داخل قسمتی که Q آن مثبت است پیکانی به محل برش رسم می‌کنیم



مرکز برش محلی که اگر نیروی وارد بر تیر از آن عبور کند تیر تحت خمش قرار می‌گیرد و هیچ پیچشی در تیر ظاهر نمی‌شود

هر مقطعی که دارای محور تقارن باشد محل تلاقی سه محور مرکز برش مقطع می‌باشد.

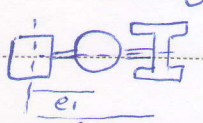
برای مقاطع جدار نازک باز که دارای یک محور تقارن‌اند محل مرکز برش روی محور تقارن مقطع قرار دارد

تعیین مرکز برش جریان برش را رسم کرده سپس گشتاورها حول از جریان حول یک نقطه (محور) دلخواه گشتاور نیروی برشی حول آن نقطه برابر قرار می‌دهیم

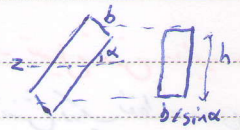
* مرکز برش مقاطع جدار نازکی که یک شاخه قائم و بقیه روی شاخه افقی‌اند $e = \sum \frac{I_i z_i}{I}$

z_i فاصله مرکز سطح هر شاخه از محور y که بر محور خنثی عمود است

$$e = \frac{\sum E_i I_i e_i}{\sum E_i I_i}$$



* تیر n جنسی



$I_z = \frac{1}{12} h^3 \frac{b}{\sin\alpha}$

ممان اینرسی مقطع مایل

* در صورتی که در مقطعی مقدار t تغییرات ناگهانی نداشته باشد به طور تدریجی تغییر نکند تنش برشی عموماً در روی محور خنثی ماکزیمم است

علاوه بر نقاط روی محور خنثی، نقاطی که در گلوگاه واقع شده‌اند ماکزیمم به چکش کرد

مقاومت برشی = نسبت نیروی برشی به تنش ماکزیمم در آن مقطع $\frac{V}{\tau_{max}}$

مقطع مستطیل شکل $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

مقطع دایروی $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

مقطع مثلثی $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

مقطع لوزی $\tau_{max} = \frac{9}{8}\frac{V}{A}$

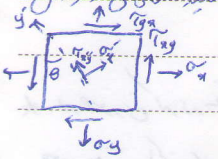
$\frac{1}{64}\pi D^4$

$\frac{1}{12} b h^3$

$I = \frac{1}{48}\frac{a\sqrt{3}}{2} \times a^3$

فصل ۶- تبدیل تنش - دایره موهر

در صورتی که تنش در یک نقطه بر روی دو صفحه که از آن نقطه می‌گذرند معلوم باشد می‌توان تنش بر روی کلیه صفحه‌های گذرا از آن نقطه عبور می‌کند را بدست آورد



$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{x'}-\sigma_{y'}}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \qquad 2\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

* تنش نرمال σ_x و σ_y در حالت کشش مثبت می‌باشد و در صورتی که جهت τ_{xy} بر محور x عمود است حول یک نقطه دلخواه داخل المان پادساعتگرد باشد علامت آن مثبت در نظر گرفته می‌شود

برای تعیین علامت θ از محور x به طرف خط عمود بر صفحه حرکت می‌کنیم اگر حرکت در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) باشد علامت θ مثبت می‌باشد

جهتی که در آن تنش $\sigma_{x'}$ ماکزیمم یا مینیمم گردد جهات اصلی و مقادیر تنش در آن جهات را تنش‌های اصلی می‌نامند

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2} \qquad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \longrightarrow \tau_{x'y'} = 0$$

در صفحه تنش اصلی تنش برشی صفر است

* تانسور تنش

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \longrightarrow \det\begin{bmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \sigma_{1,2}$$

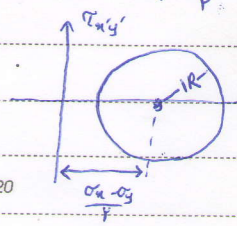
تنش برشی ماکزیمم بر روی دو صفحه عمود بر هم با زوایای θ_s و $\theta_s+\frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$$

تنش برشی ماکزیمم برای المان سه بعدی

$$\tau_{max} = \max\left(\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2-\sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3-\sigma_1|}{2}\right)$$



دایره موهر

مرکز $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$

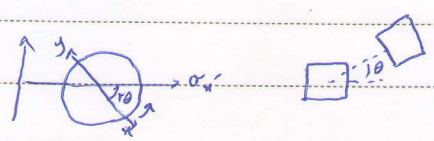
شعاع $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

x بر نقطه روی دایره نشان دهنده یک صفحه است که بردار مرکز و آن نقطه عمود بر آن صفحه است.

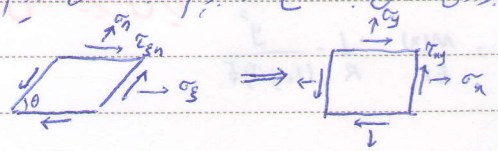
τ_{xy} زمانی مثبت است که جهت گشتاور آن حول یک نقطه داخل المان ساعتگرد باشد.

اگر تنش را بر صفحه‌ای از المان بخواهیم بردار عمود بر آن صفحه را رسم کرده و زاویه آن را با محور x به اندازه θ مشخص کرده و در دایره موهر به اندازه زاویه 2θ جدا می‌کنیم

اگر بخواهیم نقطه‌ای در دایره موهر با زاویه 2θ از x و y مشخص کنیم کافی است المان را در جهت آن به اندازه θ بچرخانیم



المان با اضلاع موازی: ابتدا با استفاده از المان داده شده تنش برروی المان با اضلاع عمود بر هم را بدست می آوریم

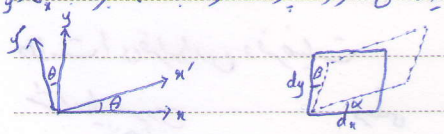


$$\sigma_y = \sigma_\eta \sin\theta$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\eta \cos\theta + \tau_{\xi\eta}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sin\theta}\left(\sigma_\xi + \sigma_\eta \cos 2\theta + 2\tau_{\xi\eta}\cos\theta\right)$$

تبدیل کرنش: مؤلفه های کرنش در سیستم مختصات $x'y'$ که با x-y زاویه θ می سازد (پادساعتگرد مثبت) برحسب $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$



$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_y \sin^2\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

علامت ε_x و ε_y مثبت می باشند اگر باعث ازدیاد طول در جهت x و y شوند. علامت γ_{xy} هنگامی مثبت است که زاویه پس از تغییر شکل از $\frac{\pi}{2}$ کمتر شود

کرنش اصلی

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2}{4}}$$

زاویه جهات اصلی $\theta_p \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$

کرنش برشی ماکزیمم $\gamma_{max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$ $\qquad \gamma_{max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$

تانسور کرنش

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$I_1' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2' = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

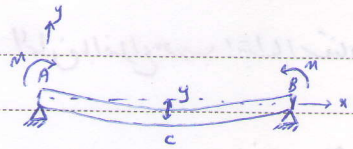
$$I_3' = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z\gamma_{xy}^2)$$

نکته: اگر سطر و ستون مورب ماتریس تنش صفر بود تنش نرمال مربوط به آن سطر و ستون یکی از تنش های اصلی است

دیگر تنش های اصلی برابر مقادیر ویژه تانسور تنش می باشند که از حذف سطر و ستون با درایه صفر باقی می ماند

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$ e اصلی

فصل ۷- تغییر مکان تیرها



تغییر مکان تیرها: $\frac{1}{R} = \frac{M(x)}{EI}$ $\quad \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$EIy'' = M(x)$ ممان

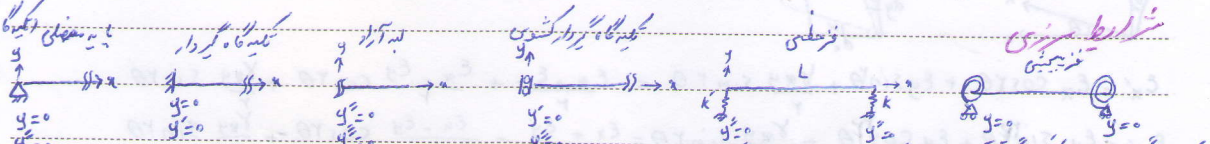
$EIy''' = V(x)$ نیروی برشی

$EIy'''' = -w(x)$ بار گسترده

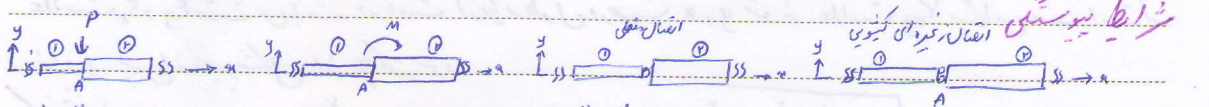
محور ای گشتاور خمشی و بار گسترده مثبت →

علامت ای قراردادی و فرضیات

شرایط مرزی



شرایط پیوستگی



$y_1 = y_2$	$y_1 = y_2$	$y_1 = y_2$	$y_1' = y_2'$
$y_1' = y_2'$	$y_1' = y_2'$	$y_1'' = y_2'' = 0$	$E_1I_1y_1'' = E_2I_2y_2''$
$E_1I_1y_1'' = E_2I_2y_2''$	$E_2I_2y_2'' - E_1I_1y_1'' = M$	$E_1I_1y_1''' = E_2I_2y_2'''$	$y_1''' = y_2''' = 0$
$E_1I_1y_1''' - E_2I_2y_2''' = P$	$E_1I_1y_1''' = E_2I_2y_2'''$		

* مرتبه y در شرایط مرزی و روابط پیوستگی که از آن ها برای تعیین ثوابت انتگرال استفاده می شود باید از مرتبه معادله دیفرانسیل بدست آمده کمتر باشد مثلاً زمانی که از $EIy'' = -w$ استفاده شده باید از شرایط مرزی و روابط پیوستگی y و y' و y'' و y''' استفاده شود

توابع استثنایی (تکینی)

$$\langle x - x_0 \rangle^n = \begin{cases} (x-x_0)^n & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

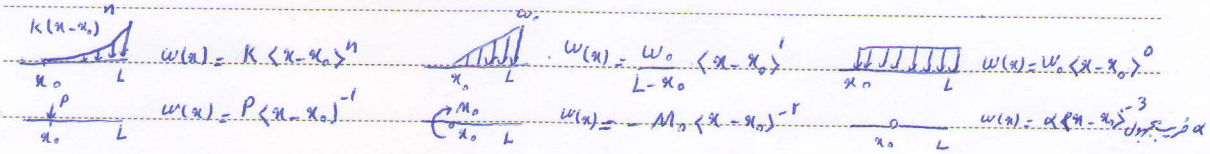
$$\langle x - x_0 \rangle^n = \begin{cases} \infty & x_0 = x \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$

$$\int \langle x - x_0 \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - x_0 \rangle^{n+1}$$

$$\int \langle x - x_0 \rangle^n dx = \langle x - x_0 \rangle^{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} \langle x - x_0 \rangle^n = n \langle x - x_0 \rangle^{n-1} \quad n > 0$$

$$\frac{d}{dx} \langle x - x_0 \rangle^n = \langle x - x_0 \rangle^{n-1} \quad n \leq 0$$



$w(x) = k \langle x - x_0 \rangle^n$

$w(x) = \frac{w_0}{L - x_0} \langle x - x_0 \rangle^1$

$w(x) = w_0 \langle x - x_0 \rangle^0$

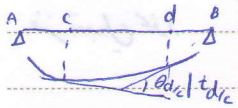
$w(x) = P \langle x - x_0 \rangle^{-1}$

$w(x) = -M_0 \langle x - x_0 \rangle^{-2}$

$w(x) = \alpha \langle x - x_0 \rangle^{-3}$ ضریب مجهول α

* در صورتی که بخواهیم بار $w(x)$ به صورت چند جمله ای را در فاصله x_0 و x_1 بررسی وارد می شود به صورت توابع منفرد بنویسیم ابتدا $w(x)$ را یک بار بر حسب توان ای $x - x_0$ و دیگر بر حسب توان ای $x - x_1$ مرتب کرده سپس عبارتی که بر حسب $x - x_1$ مرتب شده را از عبارتی که بر حسب $x - x_0$ مرتب شده را کم می کنیم و برای نمادها $\langle \rangle$ کرده و فرابت ثابت را در $\langle x - x_0 \rangle^0$ و $\langle x - x_1 \rangle^0$ ضرب می کنیم

روش لنگر مساحت سطح



قضیه ۱: تغییر شیب بین مماسی در دو نقطه c و d برابر با سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین c و d

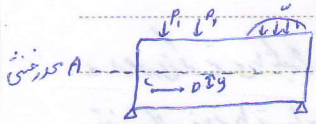
$$\theta_{d/c} = \theta_d - \theta_c = A = \int \frac{M(x)}{EI}\, dx$$

درصورتی که مساحت زیر دیاگرام مثبت باشد تغییر شیب بین c و d مخالف عقربه ساعت

قضیه ۲: فاصله قائم نقطه d نسبت به خط مماس در c ($t_{d/c}$) برابر گشتاور اول سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین c و d به نقطه d

$$t_{d/c} = \bar{x} A = \int x_1 \frac{M(x)}{EI}\, dx$$

درصورتی که سطح زیر منحنی گشتاور خمشی مثبت باشد $t_{d/c}$ بالای خط مماس بر c قرار می‌گیرد



تغییر طول تار تیر تحت خمش: تغییر طول تار CD به فاصله y از محور خنثی

$$\delta_{CD} = y \times (x_D - x_C \text{ بین } \frac{M}{EI} \text{ سطح زیر منحنی}) = y \int_{x_C}^{x_D} \frac{M(x)}{EI}\, dx = y(\theta_D - \theta_C) = y\,\theta_{D/C}$$

روش جمع آثار (سوپرپوزیشن): تغییر مکان تیر برابر است با مجموع تغییر مکان‌هایی که هر یک از بارها به تنهایی در تیر ایجاد می‌کنند

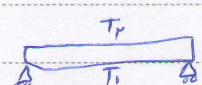
استفاده از فنرهای معادل

تیری تحت بار منفرد P است $P = k\delta$ و تیر را می‌توان معادل فنری با سختی $k = \frac{EI}{nL^3}$ در نظر گرفت

تیری تحت گشتاور M در نقطه‌ای از آن باشد $M = k\theta$ و تیر معادل فنری پیچشی با سختی $\frac{EI}{nL}$ است

تعیین منحنی تغییر مکان تیر با استفاده از سری ماکلورن

$$y(x) = y(0) + y'(0) + \frac{M(0)}{2!EI}x^2 + \frac{V(0)}{3!EI}x^3 - \frac{w(0)}{4!EI}x^4 - \frac{w'(0)}{5!EI}x^5 + \cdots$$



$$y'' = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h}$$

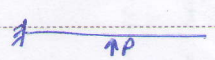
تغییر مکان تیر برابر تغییر دمای تیر در راستای منحنی است

درصورتی که دمای بالا و پایین تیر به ترتیب T_2 و T_1 باشد انحنای تیر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h}x^2 + c_1 x + c_2$$

اگر تیر قرینه بود عملاً نصف تیر را به جای کل آن مدنظر قرار داده و محاسبه می‌کنیم

$$\delta_P = \frac{PL^3}{3EI}$$



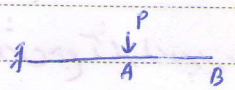
$$\delta_P = \frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI} + \frac{P(\frac{L}{2})^3}{3EI}$$

اگر در نقطه ای از تیر فنری وجود داشت می توان به صورت تیری تحت نیروی منفرد P در محل اتصال فنر تبدیل نمود

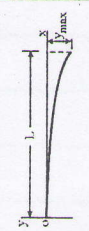
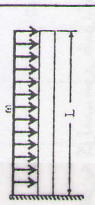
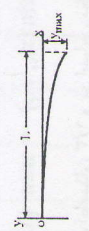
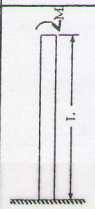
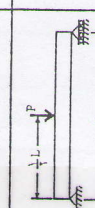
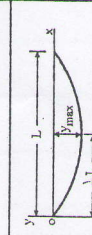
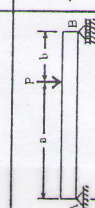
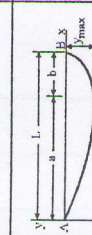
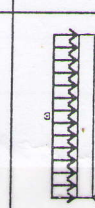
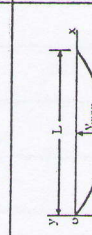
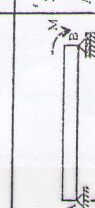
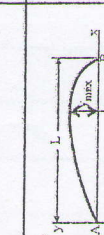
$$\delta_B = \frac{P}{\sum k} \quad \frac{\text{سختی تیر} \times \text{تغییر مکان تیر بدون فنر}}{\text{سختی فنر} + \text{سختی تیر}}$$

* برای بدست آوردن تغییر مکان در یک نقطه از تیر یک سرگیردار که بین نیرو و تکیه گاه است * نیرو و گشتاور حاصل را به آن نقطه منتقل می کنیم سپس تغییر مکان را با فرمول مربوطه بدست می آوریم

* در صورتی که تیری با تکیه گاه ساده تحت اثر مقادیر نسبت به وسط تیر قرار داشته باشد برای بدست آوردن تغییر مکان وسط تیر را به صورت تیر یک سرگیردار فرض می کنیم که تکیه گاه آن در وسط تیر واقع شده باشد تغییر مکان لبه آزاد تیر یکسر گیردار برابر با تغییر مکان وسط تیر با تکیه گاه ساده است



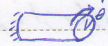
$$\delta_B = \delta_A + AB \cdot \theta_A$$

بارگذاری	خیز الاستیک	خیز ماکزیمم	شیب انتهای تیر
		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$
		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$
		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$
		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm\frac{PL^2}{16EI}$
		For $a > b$: $-\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ at $x_m = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$
		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\frac{wL^3}{24EI}$
		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$

فصل ۸ - روش انرژی

کار انجام شده توسط نیروی P (انرژی ذخیره شده در میله) $W=\int_0^{\delta_1} P\,d\delta$ کار متمم $W_c=\int_0^{P_1}\delta\,dP$

$W=\int_0^{\varphi_1} M\,d\varphi$



$W=\int_0^{\theta_1} T\,d\theta$

چگالی انرژی کرنشی: انرژی ذخیره شده بر واحد حجم چگالی انرژی کرنشی است $U_0=\int_0^{\varepsilon_1}\sigma\,d\varepsilon$ چگالی انرژی کرنشی متمم $(U_0)_c=\int_0^{\sigma_1}\varepsilon\,d\sigma$

* در حالتی که رابطه تنش و کرنش خطی باشد انرژی کرنشی بر واحد حجم برابر است $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ و اگر میله از قانون هوک $\sigma=E\varepsilon$ پیروی کند چگالی انرژی کرنشی $U_0=\frac{1}{2}E\varepsilon^2=\frac{\sigma^2}{2E}$

مقدار انرژی کرنشی برای جسمی که در جهت x تحت تنش تک محوری σ_x قرار گرفته باشد $U=\int_V U_0\,dV=\int_V\frac{\sigma_x^2}{2E}dV=\int_V\frac{E}{2}\varepsilon_x^2 dV$

انرژی کرنشی میله تحت نیروی تک محوری $U=\int_0^L\frac{P^2(x)}{2EA(x)}dx$ میله ثابت $U=\frac{P^2L}{2AE}$

انرژی کرنشی تیر تحت گشتاور خمشی $U=\int_0^L\frac{M^2(x)}{2EI}dx=\int\frac{E}{2}I\,y''^2dx$

انرژی کرنشی ذخیره شده بر اثر تنش برشی

$U=\int_V U_0\,dV=\int_V\frac{\tau_{xy}^2}{2G}dV$ چگالی انرژی ذخیره شده $U_0=\frac{\tau_{xy}^2}{2G}$ $U_0=\int_0^{\gamma}\tau_{xy}\,d\gamma_{xy}\xrightarrow[\tau_{xy}=G\gamma_{xy}]{\text{از قانون هوک}}$

انرژی کرنشی در میله بر اثر گشاور پیچشی $U=\int_0^L\frac{T^2}{2GJ}dx\xrightarrow{\text{ثابت}}U=\frac{T^2L}{2GJ}$

انرژی کرنشی در تیر بر اثر نیروی برشی $U=\int\frac{KV^2}{2GA}dA$ k برای دایره $\frac{10}{9}$ برای مستطیل $\frac{6}{5}$

قضیه کاستیگلیانو: در سازه‌های خطی مشتق نسبی انرژی کرنشی نسبت به نیروی دلخواه P_i برابر است با تغییر مکان سازه در نقطه اعمال نیروی P_i $\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}$ و در صورتی که δ_i مثبت باشد تغییر مکان در جهت نیروی P_i است

سازه‌های خطی: سازه‌ای که رابطه بین نیرو و تغییر مکان (یا تنش و کرنش) به صورت خطی (از درجه اول) باشد

مقدار دوران سازه در نقطه اعمال گشاور M_i و در جهت آن $\theta_i=\frac{\partial U}{\partial M_i}$ است

تغییر مکان خرپاها: اگر خرپایی از n میله تشکیل شده باشد انرژی کرنشی خرپا برابر است با مجموع انرژی میله‌ها $U=\sum_{j=1}^{n}\frac{F_j^2L_j}{2A_jE_j}$

بنابر قضیه کاستیگلیانو تغییر مکان در نقطه اعمال بار P_i برابر است با $\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{F_iL_j}{A_jE_j}\frac{\partial F_j}{\partial P_i}$

تغییر مکان در تیرها: $\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}=\int_0^L\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_i}dx$ و شیب تغییر در نقطه اعمال گشاور M_i $\theta_i=\frac{\partial U}{\partial M_i}=\int_0^L\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i}dx$

در صورتی که سازه‌ای از اتصال n تیر (یا قطعه) تشکیل شده باشد برای هر تیر به طور جداگانه روابط زیر را به کار می‌بریم

$$\delta_i=\sum_{j=1}^{n}\int_0^{L_j}\frac{M_j}{E_jI_j}\frac{\partial M_j}{\partial P_i}dx$$

$$\theta_i=\sum_{j=1}^{n}\int_0^{L_j}\frac{M_j}{E_jI_j}\frac{\partial M_j}{\partial M_i}dx$$

زاویه دوران در اعضای پیچشی

$$\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial T_i} = \int_0^L \frac{T}{GJ}\frac{\partial T}{\partial T_i}\,dx$$

* برای تعیین تغییر مکان (یا دوران) نقطه i از سازه در صورتی که در این نقطه نیروی P_i یا گشتاور M_i اعمال نشده باشد یک نیروی مجازی P_i (یا گشتاور مجازی M_i) به آن نقطه اعمال می‌کنیم سپس از انجام عملیات مربوطه و بدست آوردن مشتقات جزئی نسبت به نیروی مجازی P_i (یا گشتاور مجازی M_i) همچنین جایگزینی در فرمول مربوطه به تعیین δ_i یا θ_i مقدار نیروی مجازی P_i یا گشتاور مجازی M_i را برابر صفر قرار می‌دهیم

* هنگامی که یک سازه از اتصال چند عضو تشکیل شده باشد ممکن است با اعمال گشتاور پیچشی T_i به یک عضو سازه در مقداری از عضوهای دیگر سازه گشتاور خمشی بوجود آید. در این حالت برای عضوهایی که تحت گشتاور خمشی قرار گرفته‌اند از فرمول $\theta_i = \sum \int_0^{L_j} \frac{M_j}{E_j I_j}\frac{\partial M_j}{\partial M_i}$ و برای عضوهایی که تحت گشتاور پیچشی قرار گرفته‌اند از فرمول $\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial T_i} = \int \frac{T}{GJ}\frac{\partial T}{\partial T_i}$ باید استفاده کرد و از مجموع آن‌ها زاویه دوران در محل اعمال گشتاور T_i تعیین می‌گردد

تغییر مکان تیر به روش بار واحد

۱- گشتاور خمشی تیر را بر اثر بارهای وارده به آن بدست آورده و M می‌نامیم ۲- کلیه بارهای وارده بر تیر را حذف کرده سپس نیروی مماس به نقطه i اعمال کرده ۳- گشتاور خمشی تیر را بر اثر این نیروی واحد بدست آورده و آن را m می‌نامیم تغییر مکان نقطه i از تیر برابر

$$\delta_i = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx$$

تعیین شیب تیر در نقطه i در مرحله دوم به جای بار واحد یک گشتاور واحد به نقطه i اعمال کرده و گشتاور در تیر را بر اثر این گشتاور واحد بدست می‌آوریم و آن را m می‌نامیم. دوران نقطه i برابر

$$\theta_i = \int_0^L \frac{Mm}{EI}\,dx$$

تغییر مکان خرپا با استفاده از بار واحد

ابتدا نیروی عضوهای خرپا را بر اثر نیروهای وارد بر خرپا بدست می‌آوریم و نیروی عضو j ام را با F_j نمایش می‌دهیم سپس کلیه نیروهای وارد بر خرپا را حذف کرده و نیروی برابر واحد به مفصل i در جهتی که تغییر مکان مفصل i خواسته شده اعمال می‌کنیم نیروی عضوهای خرپا بر اثر بار واحد بدست می‌آوریم. نیروی عضو j ام بر اثر بار واحد به f_j نمایش می‌دهیم

تغییر مکان مفصل i برابر است با

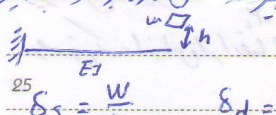
$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j f_j L_j}{A_j E_j}$$

تغییر مکان خرپا بر اثر دما خرپایی که دارای n عضو می‌باشد برای m عضو آن تغییر کند $1 \le m \le n$ تغییر مکان مفصل i برابر

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j \Delta T_j f_j$$

(f_j نیروی عضو j ام بر اثر نیروی واحد به مفصل i در جهتی که تغییر مکان آن خواسته شده است)

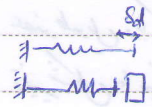
تغییر مکان سازه بر اثر ضربه در صورتی که بار به طور ناگهانی یا ضربه‌ای به سازه وارد شود تغییر مکان سازه به مراتب بیشتر از حالت استاتیکی می‌باشد که تغییر مکان دینامیکی نامیده می‌شود



$$\delta_s = \frac{W}{K} \qquad \delta_d = \delta_s\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_s}}\right)$$ حداکثر تغییر مکان دینامیکی

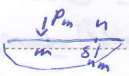
$$F_d = W\left(1+\sqrt{1+\frac{2Kh}{W}}\right)$$ حداکثر بار دینامیکی

* برای تعیین K در بارهای ضربه‌ای ابتدا تغییر مکان استاتیکی نقطه‌ای که بار ضربه‌ای به سازه اصابت می‌کند را به ازاء بار واحد بدست می‌آوریم. عکس این تغییر مکان برابر K است



$\delta_d = V\sqrt{\frac{m}{K}}$ حداکثر جمع شدگی فنر $\quad F_d = K\delta_d = V\sqrt{Km}$

قضیه بتی ماکسول نقاط m و n بر روی تیر اند و نیروی P_m به نقطه m اعمال می‌شود و تغییر مکان نقطه n برابر δ_{nm} و بار P_m برداشته و بار P_n را به n وارد کرده و تغییر مکان نقطه m برابر δ_{mn} طبق قضیه بتی ماکسول $P_m\delta_{mn} = P_n\delta_{nm}$



تغییر مکان سازه‌های غیرخطی درصورتی که تغییر مکان با نیرو رابطه غیرخطی داشته باشند باید از انرژی کرنشی متمم U_c استفاده نمود

$\theta_i = \frac{\partial U_c}{\partial M_i} \qquad \delta_i = \frac{\partial U_c}{\partial P_i}$ قضیه دوم کاستگلیانو

$M_i = \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \qquad P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$ قضیه اول کاستگلیانو

دو رابطه روبرو برای انرژی کرنشی برقرارند

* درصورتی که رابطه نیرو و تغییر مکان (تنش کرنش) خطی باشد $U_c = U$ است

انرژی کرنشی در حالت کلی

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}$$

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right] + \frac{3}{2}\alpha T(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

تنش ناشی از حرارت

$$U_0 = \frac{1}{2}\lambda\left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right] - \frac{3\alpha ET}{2(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

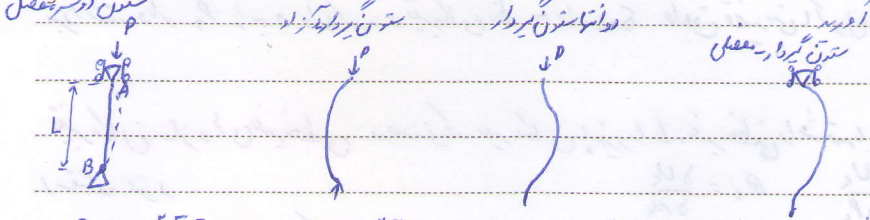
* در سازه‌های نامعین از درجه n درصورتیکه انرژی کل سازه برحسب نیروهای مجهول برابر U باشد مشتق U نسبت به هر یک از نیروهای مجهول برابر صفر است

فصل ۹ - کمانش ستون‌ها

عضو طویل و باریکی که تحت بار محوری فشاری قرار گرفته باشد را ستون می‌نامند

تغییر شکل جانبی آنی تحت این بار، کمانش ستون نامیده می‌شود

نیروی بحرانی برای سازه‌ای شامل یک میله صلب و فنر: ابتدا فرض کرده که میله به اندازه زاویه θ منحرف شده سپس نیروهایی که فنر بر اثر این انحراف به میله وارد می‌کند را به دست می‌آوریم. با نوشتن معادلات تعادل برای میله نیروی بحرانی را به دست آورید



$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{\frac{1}{4}L^2} \qquad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{0.49L^2}$$

فرمول اویلر

به طور کلی نیروی کمانش برای ستون‌های انعطاف‌پذیر را می‌توان به صورت $P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$ نمایش داد

L_e طول مؤثر

تنش بحرانی تنش بحرانی در ستون‌ها برابر

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{AL_e^2}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع ژیراسیون $\frac{L_e}{r}$ ضریب لاغری یا ضریب باریکی

تعیین بار بحرانی با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم

$$y=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x+C_3x+C_4$$

با اعمال شرایط مرزی بار بحرانی ستون تعیین می‌گردد

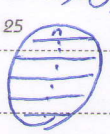
تیر-ستون ستونی که علاوه بر بار محوری P تحت بار جانبی نیز قرار گرفته باشد تیر-ستون نامیده می‌شود

تغییر مکان تیر-ستون از معادله $EIy''=M$ یا $EIy''+Py''=-w(x)$ که $w(x)$ بار گسترده جانبی بر روی تیر-ستون می‌باشد

در صورتی از $EIy''+Py''=-w(x)$ می‌توان استفاده کرد که رابطه نیروی برشی و تغییر مکان به صورت $EIy'''+Py'=V$ بیان می‌شود

ابتدا تغییر مکان را از معادله فوق پیدا کرده سپس تغییر مکان را به سمت بی‌نهایت می‌رسانیم تا بار بحرانی تعیین گردد

کمانش ستون‌های مرکب برای ستون‌هایی که با مقطع مرکب که مطابق شکل از n ماده تشکیل شده



$$P_{cr}=\frac{\pi^2\sum_{i=1}^{n}E_iI_i}{L_e^2}$$

I_i ممان اینرسی ماده iام حول محور کمانش (محور تقارن مقطع)